


Cap. 4 Análise de Decisão

Sistemas de Apoio à Decisão


Optativa



Instituto Superior
de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
DESDE 1911

Análise de Decisão


Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



- Análise de Decisão
 - Modelação
 - Critérios de Decisão
 - Não Probabilísticos
 - Probabilísticos
- Decisão Sem Incorporação de Experiência
- Decisão Com Incorporação de Experiência
- Árvores de Decisão
- Resolução com o *Tree Plan/Excel*

2012/13 M Cândida Mourão 2

Instituto Superior de Economia e Gestão
 UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA




Análise de Decisão - Modelação

- 1) **Ações:** $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$
 - Identificar e enumerar TODAS as Ações de forma
 - EXAUSTIVA – não ignorar ações
 - EXCLUSIVA – evitar duplicações ou possibilidade de escolha múltipla
 - **Objetivo** – escolher uma e uma só ação de A
- 2) **Estados da Natureza:** $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$
 - Identificar e enumerar TODOS os Estados da Natureza de forma
 - EXAUSTIVA – não ignorar estados da natureza
 - EXCLUSIVA – evitar duplicações ou ambiguidades
 - Ocorre um e um só estado!
 - O decisor só conhece o estado depois de escolhida a ação

2012/13
M Cândida Mourão
3

Instituto Superior de Economia e Gestão
 UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



Análise de Decisão - Exemplo

Exemplo Protótipo - (H&L, pg. 673)

The GOFERBROKE COMPANY owns a tract of land that may contain oil. A consulting geologist has reported to management that she believes there is 1 chance in 4 of oil.

Because of this prospect, another oil company has offered to purchase the land for \$90,000. However, Goferbroke is considering holding the land in order to drill for oil itself. The cost of drilling is \$100,000. If oil is found, the resulting expected revenue will be \$800,000, so the company's expected profit (after deducting the cost of drilling) will be \$700,000. A loss of \$100,000 (the drilling cost) will be incurred if the land is dry (no oil).

However, before deciding whether to drill or sell, another option is to conduct a detailed seismic survey of the land to obtain a better estimate of the probability of finding oil. Section 15.3 discusses this case of *decision making with experimentation*, at which point the necessary additional data will be provided.

2012/13
M Cândida Mourão
4

Análise de Decisão - Modelação

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

3) Função Ganho (Proveito)

- Avaliar as ações em função das consequências que arrastam e das preferências do decisor por tais consequências
- $p(a_i, \theta_k)$ ganho de tomar a ação $a_i \in A$ e o estado da natureza ser $\theta_k \in \Theta$
($i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$)
- Eliminar do estudo eventuais **ações dominadas!**
- **Critérios de Decisão**
 - Não Probabilísticos: **MAXIMIN**
 - Probabilísticos: **Bayes**; Máxima Verosimilhança

2012/13
M Cândida Mourão
5

Análise de Decisão

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA


Problemas a responder

- Que ação escolher?
- Qual o ganho esperado da ação escolhida?
- Valerá a pena efetuar uma experiência (sondagem; estudo de mercado; ...) para diminuir a incerteza? Ou seja, será que o aumento no ganho esperado resultante da realização de uma experiência compensa o custo da mesma? → Preço de reduzir a incerteza!
- Qual o preço que estamos dispostos a pagar para eliminar a incerteza?

2012/13
M Cândida Mourão
6

Decisão Sem Experiência

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

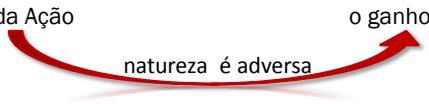


Critério de Decisão Não Probabilístico

Princípio de Decisão **MAXIMIN** (Wald, 1945)


- Critério pessimista ➡ a natureza “é do contra”! O estado de natureza será o pior possível para a ação que o decisor escolher.
- Cada Ação o ganho mínimo

natureza é adversa



Ação **maximin** ➡ maximiza o ganho mínimo


$$\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \min_{1 \leq k \leq n} \{p(a_i, \theta_k)\} \right\}$$



2012/13
M Cândida Mourão
7

Decisão Sem Experiência

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



Princípio de Decisão **MAXIMIN**

Vantagens


- Protege o decisor contra o “pior caso”
- Garante um ganho mínimo
- Não permite perdas disparatadas

Adapta-se a situações de

- Forte aversão ao risco
- Concorrência agressiva

- Determinar a ação maximin para o exemplo protótipo

2012/13
M Cândida Mourão
8

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA 


Decisão Sem Experiência - Exemplo

Considerando a matriz de ganhos seguinte determine a correspondente ação maximin e comente o resultado

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	θ_3	
a_1	100	180	-100	
a_2	-80	-80	-80	

R:

2012/13M Cândida Mourão9

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA 

Decisão Sem Experiência - Exemplo

Considerando a matriz de ganhos seguinte determine a correspondente ação maximin e comente o resultado

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	θ_3	
a_1	100	180	-100	
a_2	-80	-80	-80	

R: a ação maximin é $\tilde{a} = a_2!$

2012/13M Cândida Mourão10

Decisão Sem Experiência

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Critério de Decisão Probabilístico

Princípio de Decisão Bayes

Informação do decisor sobre os estados da natureza (v.a.) traduzida por uma distribuição de probabilidade – distribuição *a priori*

$$h_{\theta}(k) = P[\theta = \theta_k] \quad \text{probabilidade } a \text{ priori do estado } \theta_k$$

Princípio de Bayes - ação que maximiza o ganho esperado (**risco de Bayes**), ou seja, a ação correspondente a:

$$\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{k=1}^n h_{\theta}(k) p(a_i, \theta_k) \right\} = \max_{1 \leq i \leq m} \{E[p(a_i, \theta)]\}$$

2012/13
M Cândida Mourão
11

Decisão Sem Experiência

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

➤ Determinar a ação Bayes para o exemplo protótipo


$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$h_{\theta}(k)$			

$$E[p(a_1, \theta)] =$$

$$E[p(a_2, \theta)] =$$

2012/13
M Cândida Mourão
12

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



Decisão Sem Experiência

➤ Determinar a ação Bayes para o exemplo protótipo

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$h_\theta(k)$	1/4	3/4	1


$E[p(a_1, \theta)] = \frac{1}{4} \times 700 + \frac{3}{4} \times (-100) = 100$

$E[p(a_2, \theta)] = 90$

$a_h = a_1!$

2012/13 M Cândida Mourão 13

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



Decisão Com Experiência

➤ Valerá a pena recorrer a experimentação para diminuir a incerteza?

➤ O **valor esperado da informação perfeita (EVPI)** = valor que o decisor paga para retirar a incerteza, para saber qual dos estados da natureza se irá observar!

➤ a_h = ação Bayes (sem experiência), com ganho esperado $E[p(a_h, \theta)]$

$$EVPI = EP - E[p(a_h, \theta)]$$


com EP = ganho esperado com informação perfeita (IP), logo:

$$EP = \sum_{k=1}^n h_\theta(k) p(\tilde{a}^k, \theta_k)$$

e \tilde{a}^k é a ação a escolher se o estado da natureza é θ_k (melhor ação para θ_k)

2012/13 M Cândida Mourão 14

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



Valor Esperado da Informação Perfeita

➤ Valor esperado da Informação Perfeita - *EVPI*

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$h_\theta(k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1


➤ Se $\theta = \theta_1$ escolho com ganho $\Rightarrow EP =$

➤ Se $\theta = \theta_2$ escolho com ganho $\Rightarrow EP =$

$EVPI =$

2012/13M Cândida Mourão15

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



Valor Esperado da Informação Perfeita

➤ Valor esperado da Informação Perfeita - *EVPI*

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$h_\theta(k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

➤ Se $\theta = \theta_1$ escolho a_1 com ganho 700 $\Rightarrow EP = \frac{1}{4} \times 700 + \frac{3}{4} \times (90) = 242,5$

➤ Se $\theta = \theta_2$ escolho a_2 com ganho 90

$EVPI = 242,5 - 100 = 142,5$

2012/13M Cândida Mourão16

Decisão Com Experiência




- Se realizar uma experiência (diminuir a incerteza) a ação a escolher deve depender do resultado obtido. O decisor deve ter uma função de decisão que o ajude a escolher em função dos resultados da experiência. **Questões:**
 - Deve ou não ser feita a experiência?
 - Se optar pela experiência que ação escolher, em função do resultado da experiência?
- Optando pela **função de decisão Bayes**, a ação é escolhida aplicando o princípio de Bayes ao ganho esperado para as probabilidades revistas (*a posteriori*), tendo em conta cada um dos possíveis resultados da experiência e as probabilidades destes resultados!

Decisão Com Experiência




Seja:

- S v.a. → informação adicional da experiência
- $h_{\theta}(k)$ as probabilidades *a priori*
- $Q_{S|\theta=\theta_k}(s) = P(S = s|\theta = \theta_k)$ a **função de verosimilhança** da experiência


 credibilidade da experiência em face de resultados passados
- $P_{\theta S}(\theta_k, s) = P(S = s|\theta = \theta_k) P(\theta = \theta_k)$ é a f.d. conjunta do par aleatório (θ, S)
- $P(S = s) = \sum_{k=1}^n P(S = s|\theta = \theta_k) P(\theta = \theta_k)$ é a f.d. marginal da v.a. S

Instituto Superior de Economia e Gestão
 UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



Decisão Com Experiência

➤ **Método:**

- 1) Calcular as probabilidades *a posteriori*

$$P(\theta = \theta_k | S = s) = \frac{P(S = s | \theta = \theta_k) P(\theta = \theta_k)}{\sum_{k=1}^n [P(S = s | \theta = \theta_k) P(\theta = \theta_k)]}$$

Excel


- As probabilidades *a posteriori* representam a probabilidade de cada estado, condicionada ao resultado da experiência.

- 2) Para cada resultado possível da experiência, e tendo em conta as probabilidades *a posteriori*, determinar a ação Bayes
- 3) Calcular o ganho esperado da experiência, tendo em conta a f.d. marginal de S e as ações Bayes para cada resultado possível.

➤ **Árvores de Decisão** – alternativa!

2012/13
M Cândida Mourão
19

Instituto Superior de Economia e Gestão
 UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



Decisão Com Experiência - Exemplo

Exemplo Protótipo (continuação – H&L pág. 680)

Considere-se que é possível a elaboração de testes sísmicos ao terreno, para avaliar a possível existência de petróleo no subsolo, a um custo de 30 000 *u.m.*.


Deste teste pode obter-se um de dois resultados: FSS (é provável a existência de petróleo) ou USS (não é provável a existência de petróleo).

Da observação passada em áreas semelhantes sabe-se que: o teste acertou, sempre que existia petróleo, em 60% dos casos; e acertou na não existência de petróleo em 80% dos casos

- a) Valerá a pena efectuar um teste sísmico?
- b) Qual a acção que deve ser escolhida para cada um dos resultados do teste?
- c) Qual o valor esperado do ganho associado à realização do teste?

2012/13
M Cândida Mourão
20

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



Decisão Com Experiência - Exemplo


Determinar a ação Bayes tendo em conta o resultado obtido:

- Calcular as probabilidades *a posteriori* para cada resultado da experiência;
- Identificar a ação Bayes com as probabilidades *a posteriori* de θ_k

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
Prob <i>a posteriori</i>			1

2012/13
M Cândida Mourão
21

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



Decisão Com Experiência - Exemplo

➤ Se o teste deu como resultado $S='FSS'$


Excel
(prob. *a posteriori*)

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$P[\theta = \theta_k/S = 'FSS']$			

$E[p(a_1, \theta)] =$
 $E[p(a_2, \theta)] =$

2012/13
M Cândida Mourão
22

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



Decisão Com Experiência - Exemplo

➤ Se o teste deu como resultado $S='FSS'$

[Excel](#)
(prob. a posteriori)

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$P[\theta = \theta_k/S = 'FSS']$	$1/2$	$1/2$	1


$$E[p(a_1, \theta)] = \frac{1}{2} \times 700 + \frac{1}{2} \times (-100) = 300 \quad \leftarrow$$

$$E[p(a_2, \theta)] = 90$$

Se for efetuado o teste e $S='FSS'$, $a_h = a_1!$

2012/13 M Cândida Mourão 23

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



Decisão Com Experiência - Exemplo

➤ Se o teste deu como resultado $S='USS'$

[Excel](#)
(prob. a posteriori)


$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$P[\theta = \theta_k/S = 'USS']$			

$$E[p(a_1, \theta)] =$$

$$E[p(a_2, \theta)] =$$

2012/13 M Cândida Mourão 24

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



Decisão Com Experiência - Exemplo

➤ Se o teste deu como resultado $S='USS'$

[Excel](#)
(prob. a posteriori)

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$P[\theta = \theta_k/S = 'USS']$	0,14	0,86	1


$E[p(a_1, \theta)] = 0,14 \times 700 + 0,86 \times (-100) = 12$

$E[p(a_2, \theta)] = 90$ ←

Se for efetuado o teste e $S='USS'$, $a_h = a_2!$

2012/13
M Cândida Mourão
25

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA



Decisão Com Experiência - Exemplo

➤ Ganho Esperado da Experiência

[Excel](#)
(f.d. marginal de S)

S	FSS	USS
Ação Bayes	a_1	a_2
Ganho Esperado	300	90
$P[S = s]$		

$EVE =$

2012/13
M Cândida Mourão
26

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Decisão Com Experiência - Exemplo

➤ Ganho Esperado da Experiência

[Excel](#)
(f.d. marginal de S)

<i>S</i>	<i>FSS</i>	<i>USS</i>
Ação Bayes	a_1	a_2
Ganho Esperado	300	90
$P[S = s]$		

$EVE = 0,3 \times 300 + 0,7 \times (90) - 100 = 53$ (em 1000 u.m.)

R: Vale a pena fazer o teste, que custa 30 000 u.m.!

2012/13
M Cândida Mourão
27

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Árvores de Decisão

Usam-se quando:

- 1) Existem ações sequenciais no tempo (Experiências,...)
- 2) Estados de natureza com probabilidades associadas distintas

Árvore de Decisão - 2 tipos de nodos:

- Nodos de Decisão** – a escolha do caminho a seguir é do decisor
- Nodos Causais** (ou aleatórios) – a determinação do caminho é em função de acontecimentos que o decisor não controla

Excel / TreePlan

2012/13
M Cândida Mourão
28